Matrices et applications linéaires, groupe symétrique, déterminants

Durée : 3 heures. Calculatrices non autorisées.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice 1 : Algèbre linéaire

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et id l'application identité de $\mathbb{R}^3$. On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Calculer le rang de f. Que peut-on en déduire sur f ?

2) Déterminer $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id})$, ainsi que sa dimension. Vérifier que $u_1 = e_1 - 2e_2 + e_3$ appartient à cet ensemble.

3) On pose $u_2 = -e_2 + e_3$ et $u_3 = e_3$. Montrer que $\mathcal{B}' = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

4) Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1}.

5) Soit A' la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

- **a)** Après avoir rappelé la relation liant les matrices A et A', calculer A'.
- **b)** Pour tout entier naturel n, calculer $(A')^n$.
- **c)** En déduire l'expression de A^n en fonction de n.

6) Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est P. Montrer que h est une symétrie par rapport à un espace E_1 et parallèlement à un espace E_2. On précisera les bases de E_1 et E_2.

7) Déterminer une base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de h dans la base $\mathcal{C}$ soit donnée par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Sur le groupe A_n

Dans cet exercice, on considère un entier $n \geq 5$. On note S_n le groupe symétrique d'ordre n, et pour deux permutations σ et τ de S_n, on notera $\sigma\tau := \sigma \circ \tau$. On note A_n le sous-ensemble des permutations paires de S_n, i.e. dont la signature vaut 1.

1) On considère un p-cycle σ de S_n. À quelle condition est-ce que σ appartient à A_n ?

2) Montrer que A_n est un sous-groupe de S_n.

3) Donner le cardinal de S_3, puis la liste des éléments de S_3.

4) Donner la liste des éléments de A_3. Quels sont les sous-groupes de A_3 ?

5) Un résultat du cours affirme que toute permutation de S_n peut s'écrire comme un produit de transpositions. Le but de cette question est d'établir que A_n est engendré par les 3-cycles.

a) Montrer que le produit de deux transpositions (à supports disjoints ou non) de S_n peut s'écrire soit comme un 3-cycle, soit comme un produit de deux 3-cycles.

b) Conclure.

6) Montrer que l'application $\varphi : \sigma \mapsto \sigma(1\,2)$ est une bijection de A_n dans $S_n \setminus A_n$.

7) En déduire le cardinal de A_n.

On dit qu'un sous-groupe H d'un groupe G est *distingué* si : $\forall h \in H \quad \forall x \in G \quad xhx^{-1} \in H$.

8) Montrer que A_n est un sous-groupe distingué de S_n.

Exercice 3 : Déterminant dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$

On considère dans cet exercice l'ensemble $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ des matrices de taille n à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On admettra que $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est un anneau. Pour une matrice A de $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$, on définit son déterminant de la même manière que la matrice A vue comme un élément de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

On considère $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$.

1) Rappeler la définition du déterminant de A, en fonction des coefficients a_{ij}.

2) En déduire que $\det A \in \mathbb{Z}$.

On note $GL_n(\mathbb{Z})$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ pour lesquelles il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ telle que $AB = I_n$ (on admettra que cela équivaut à $BA = I_n$). On dira alors que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ et on notera $B := A'$.

3) Justifier que si A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ alors A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et que dans ce cas $A^{-1} = A'$.

4) Dans cette question on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et calculer A^{-1}. La matrice A est-elle inversible dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$?

5) On suppose maintenant A inversible. Montrer que $\det A \in \{-1, 1\}$.

6) Réciproquement, on suppose que $\det A \in \{-1, 1\}$. Montrer que $A \in GL_n(\mathbb{Z})$.
Indication : on pourra utiliser la comatrice de A.

7) Application : dans cette question on suppose que $A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 2 & -1 \\ 3 & \alpha & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ avec $\alpha \in \mathbb{Z}$. Déterminer les valeurs de α pour lesquelles A est inversible dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$.